勾股定理

湖南广播电视大学　杨先林

1 关于勾股定理

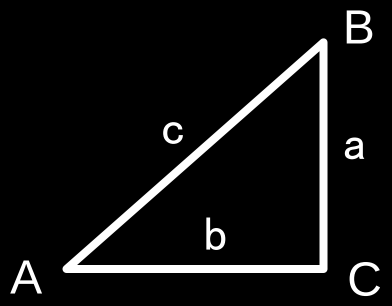
2 毕达哥拉斯定理的证明思想

3 趣谈毕达哥拉斯定理

1. 关于勾股定理

任意直角三角形斜边的平方等于两直角边的平方和。

$$a^2 + b^2 = c^2$$



据考证，人类对这条定理的认识，少说也超过 4000 年！中国最早的一部数学著作——《周髀算经》的第一章，就有这条定理的相关内容。

周公问：“窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺立周天历度。夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？”

商高答："数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出九九八十一，故折矩以为勾广三，股脩四，径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘。得成三、四、五，两矩共长二十有五，是谓积矩。故禹之所以治天下者，此数之所由生也。"

就是说，矩形以其对角相折所成的直角三角形，如果勾（短直角边）为3，股（长直角边）为4，那么弦（斜边）必定是5。

从上面所引的这段对话中，我们可以清楚地看到，我国古代的人民早在几千年以前就已经发现并应用勾股定理这一重要的数学原理了。

在中国，也称勾股定理为“商高定理”。

在西方有文字记载的勾股定理最早的证明是毕达哥拉斯给出的。据说当他证明了勾股定理以后，欣喜若狂，杀牛百头，以示庆贺。故西方亦称勾股定理为“百牛定理”。

毕达哥拉斯的证明方法早已失传，我们无从知道他的证法。

实际上，在更早期的人类活动中，人们就已经认识到该定理的某些特例。

公元前2000年左右的古巴比伦的泥板书，三边为3:4:5三角形的特殊例子，勾股数表等。

古埃及人曾利用“勾三股四弦五”的法则来确定直角。

勾股定理是重要定理，也是初等几何中最精彩、最著名、最有用的定理。

原因如下：

（1）它的证明是论证数学的发端；

（2）它是历史上第一个把数与形联系起来的定理（或者这是第一个把几何与代数联系起来的定理）。

（3）它导致了无理数的发现，引起了第一次数学危机，加深了人们对数的理解。

（4）它是历史上第一个给出了完全解答的不定方程，引出了费马大定理。

（5）它是欧氏几何的基本定理，并有巨大的实用价值。

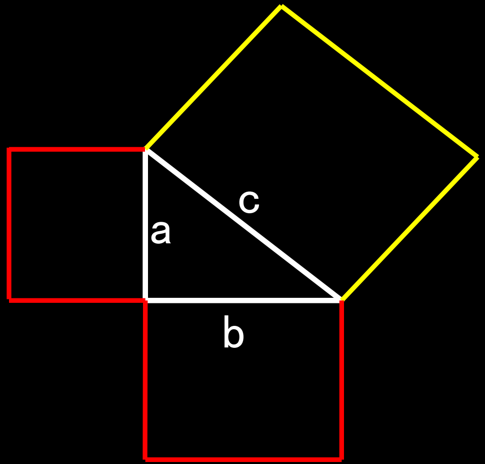
2. 毕达哥拉斯定理的证明思想

勾股定理是几何学中的明珠，它充满魅力，千百年来，人们对它的证明趋之若鹜，其中有著名的数学家、画家、总统和老百姓。

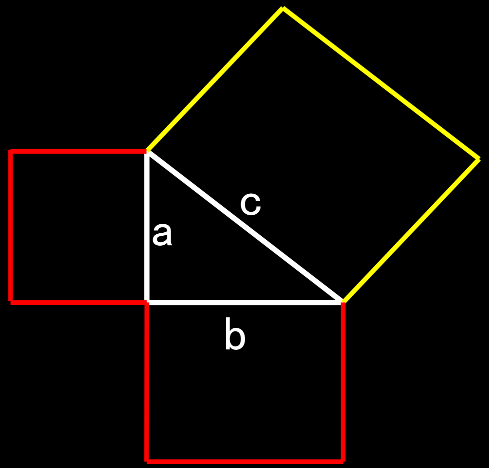
卢米斯在《毕达哥拉斯定理》书中第二版收集了370种证明方法。

（1）《几何原本》中的证明思想

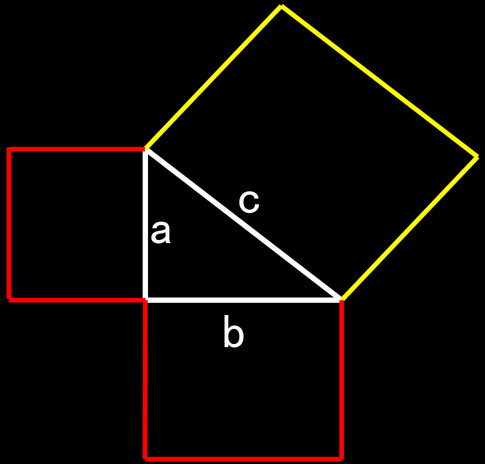
先以c为一边向外作正方形，然后再以a和b为边向外作正方形。



然后再证明以a和b为边的两个正方形的面积之和等于以c为边的正方形的面积。 $a^2 + b^2 = c^2$

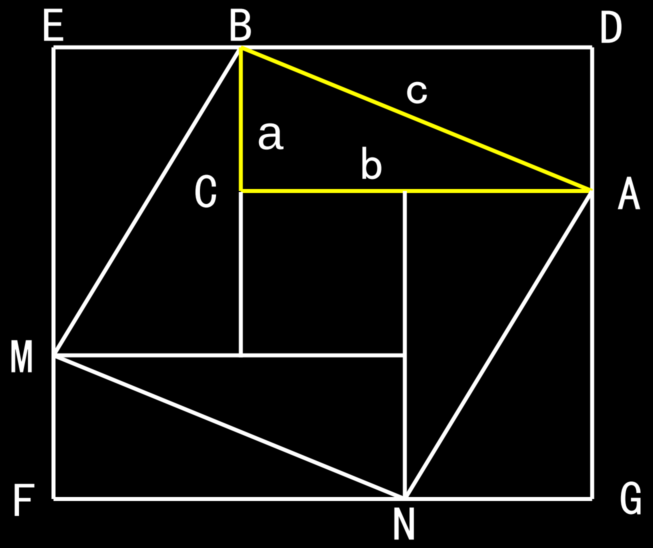


用于证明定理的图形成了一个著名的图形，因为它的样子像风车，所以人们称它为“风车”。

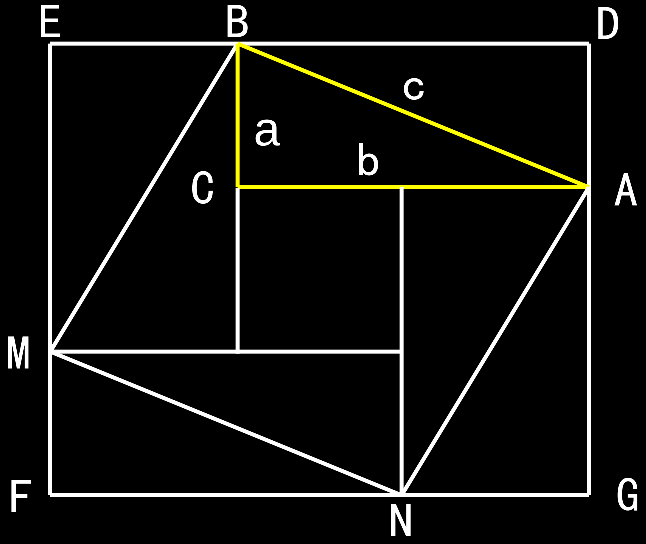


（2）商高的证明思想

把矩形ADBC用对角线AB分成两个直角三角形，然后以AB的边长作正方形BMNA，

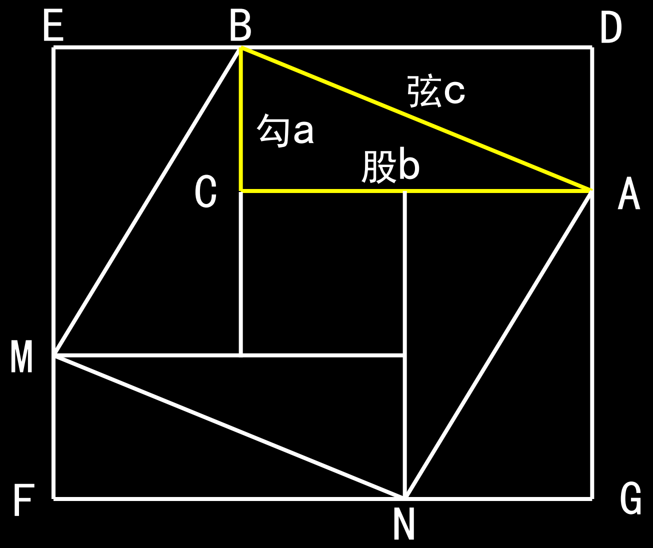


再用与直角三角形BAD相同的三角形把这个正方形围起来，形成一个新的正方形DEFG，



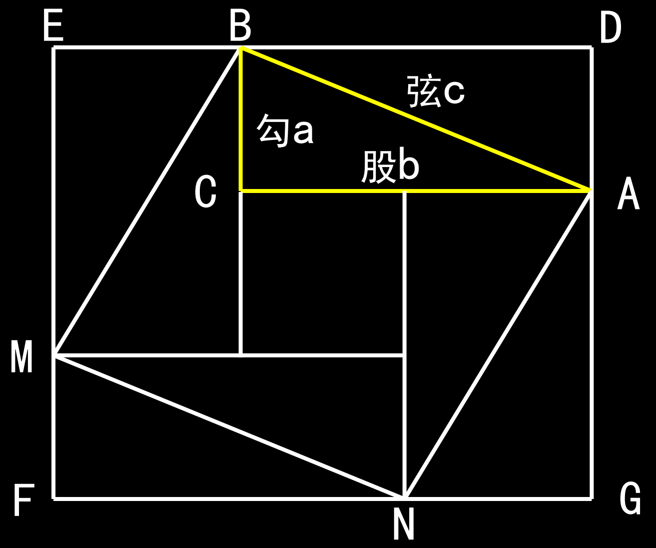
DEFG面积为（3＋4）^{2}=49，2个矩形

ADBC的面积之和为 2×3×4＝24

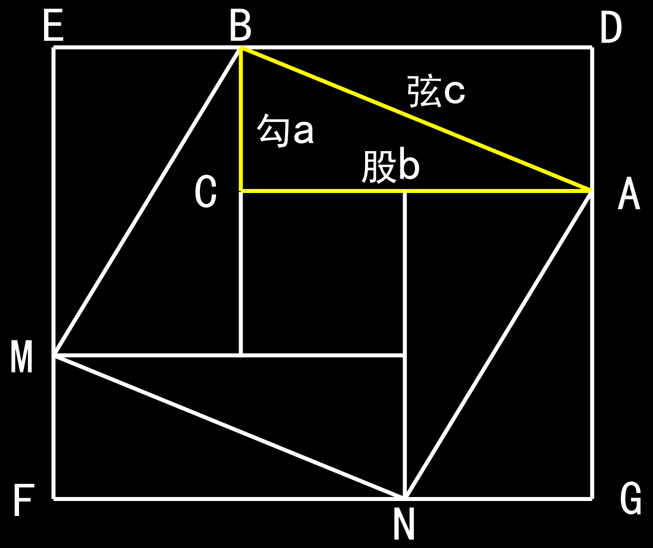


正方形ABMN的面积＝方形盘DEFG－2个矩形ADBC的面积，

即　$49-24=25=5^2 = 3^2+4^2$，

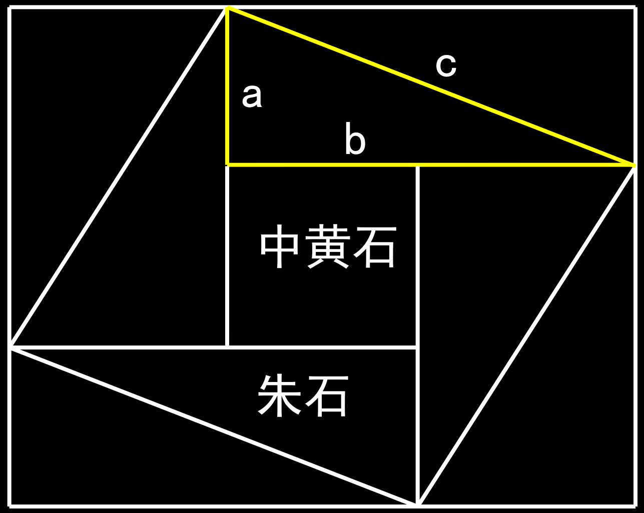


也就是“勾的平方加股的平方等于弦的平方”。



（3）赵爽的证明思想

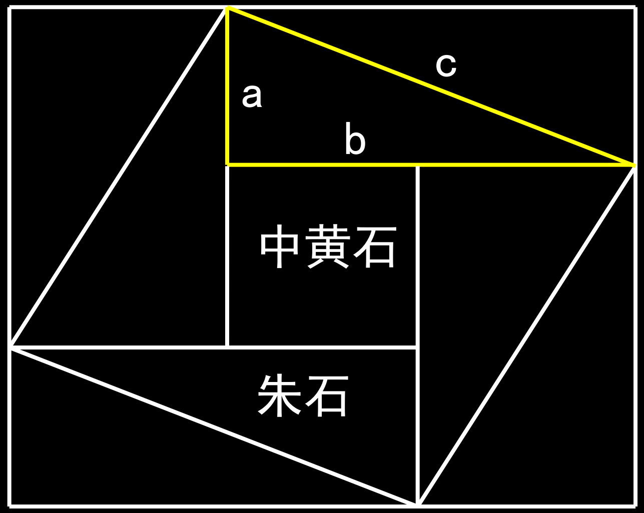
以a, b, c分别表示勾、股、弦，



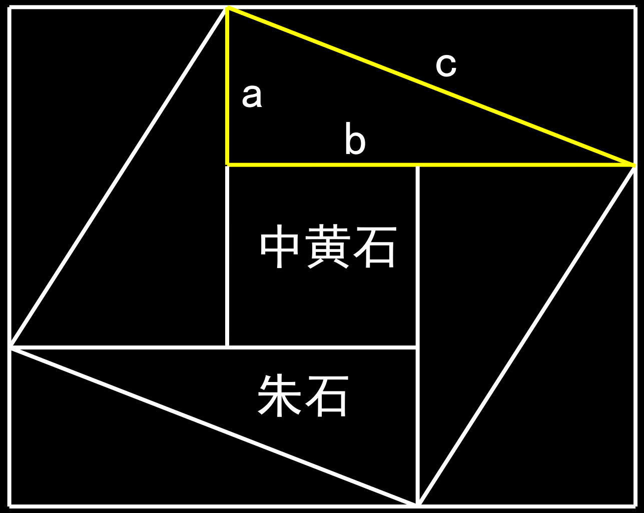
那么a×b表示两块“朱石”的面积，

2ab表示四块“朱石”的面积，

$(b-a)^2$ 表示“中黄石”的面积。

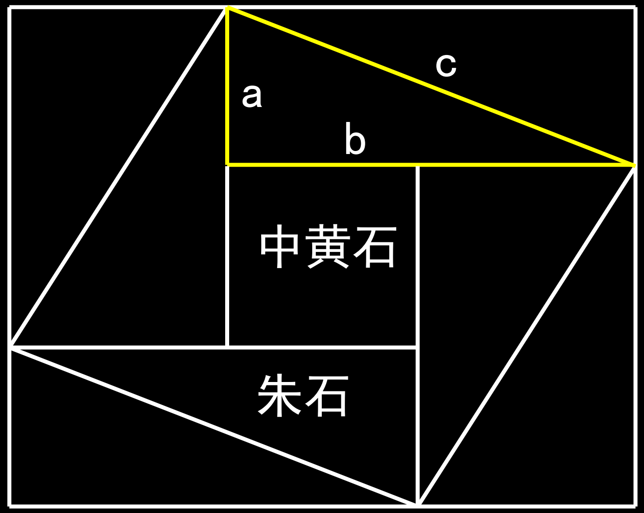


四块“朱石”的面积加上一个“中黄石”的面积就等于以c为边长的正方形的面积。



$$c^2 = (b-a)^2 + 2ab = a^2 + b^2$$

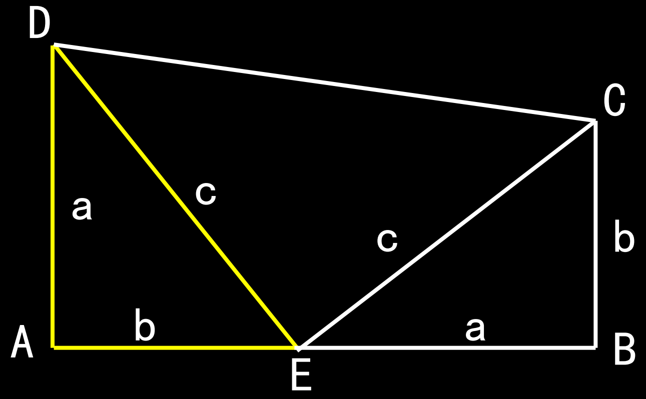
这就是勾股定理的一般表达式。



（4）加菲尔德的证明思想

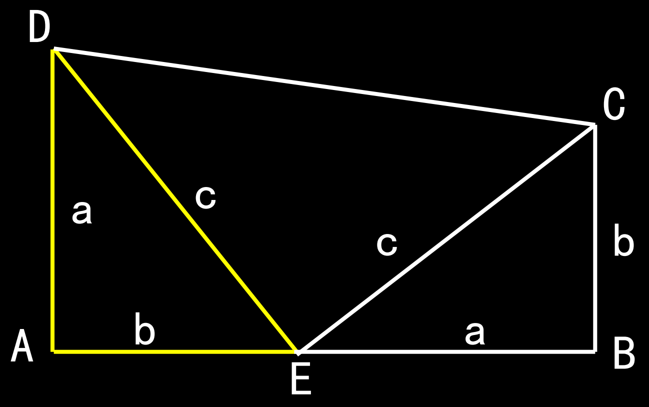
1876年4月1日，加菲尔德在《新英格兰教育日志》上发表了他对勾股定理的证法。1881年，伽菲尔德就任美国第20任总统，后来人们为了纪念他对勾股定理直观、简捷、易懂、明了的证明，就把该证法称为“总统”证法。

在 Rt△ADE 的斜边上，作等腰Rt△DEC，过点C作AE的垂线交AE的延长线于B，那么，在△ADE和△BEC中，



$\angle ADE=\angle BEC$， $ED=EC$， $\angle A=\angle B=90$

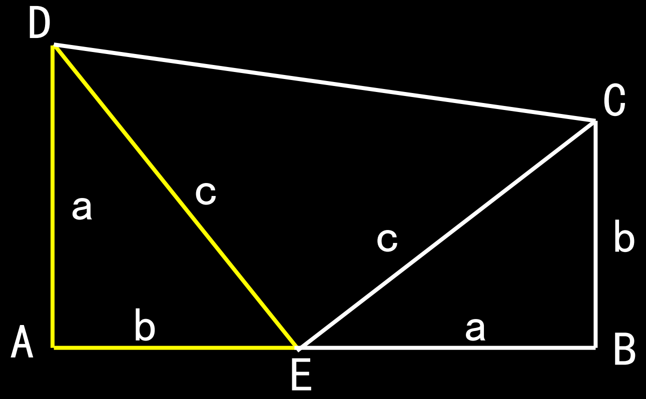
因此 $\triangle ADE\cong\triangle BEC$



所以 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle BEC} = ab/2$

又 $S_{\triangle DEC} = c^2/2$

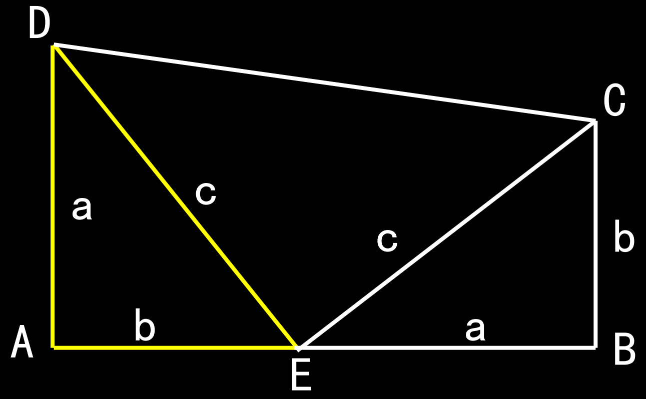
$S_{梯形ABCD} = (a+b)(a+b)/2$



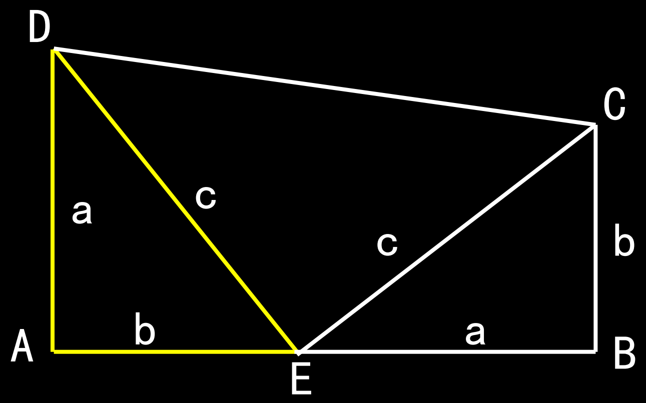
因为梯形ABCD的面积等于△ADE，

△BEC，△DEC三个面积之和.

$(a+b)(a+b)/2 = c^2/2 + ab/2 + ab/2$



即 $a^2+b^2=c^2$



3. 趣谈毕达哥拉斯定理

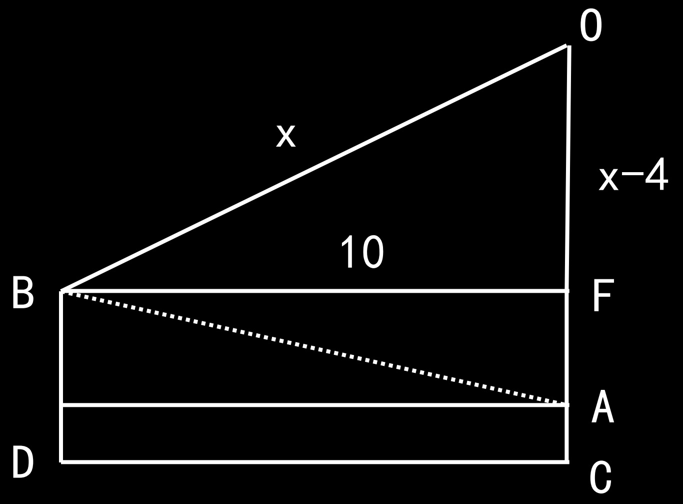
(1) 在明朝程大位著作《算法统宗》里，有这样一道荡秋千的趣题。

平地秋千未起，　踏板一尺离地，
送行二步与人齐，五尺高曾记。
仕女佳人争蹴，　终朝笑语欢嬉，
良工高士素好奇，算也索长有几？

译成数学题目:

即假设OA为静止时秋千绳索的长，

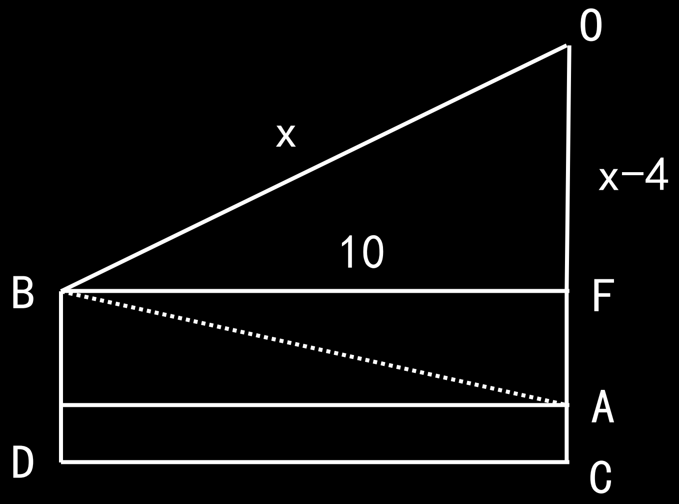
AC=1, BD=5,BF=10,求OA 。



根据勾股定理得

$$(x-4)^2+10^2=x^2$$

x=14.5



(2)毕达哥拉斯定理在初等数学中的作用

余弦定理

(3)宇宙间头等重要的定理

据说，宇宙间凡有智慧的生物，都可能懂得毕达哥拉斯定理。

“茫茫宇宙是否还存在外星文明？”

要寻找外星文明，首先应该寻找一种能跟外星人联系的“语言”

建议用毕达哥拉斯定理作纽带。