

# 连分数的应用

——为什么四年一闰，而百年又少一闰？

湖南广播电视大学 杨 芳

1 简单连分数

2 为什么四年一闰，而百年又少一闰？

3 思考题

# 简单连分数

我们见到了一个有趣的分数：

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

这就是所谓的连分数

# 简单连分数

若 $a_0$  为整数,  $a_1, a_2, \dots$  皆为正整数, 则

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots \frac{1}{a_n + \dots}}}}$$

叫做简单连分数

用符号  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  来表示

# 简单连分数

分数

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots \frac{1}{a_n}}}}$$

叫做有限连分数。

用符号  $[a_0, a_1, a_2 \cdots a_n]$  来表示

# 简单连分数

例

$$\frac{37}{11} = 3 + \frac{4}{11} = 3 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [3, 2, 1, 3]$$

或者

$$\frac{37}{11} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = [3, 2, 1, 2, 1]$$

# 简单连分数

结论1 任何一个有理数都能展开为有限简单连分数。

结论2 任何一个有限简单连分数都可化为一个有理数。

# 渐近分数

分别由原连分数在第一，第二，第三，……处切断而得到，这些分数分别叫做连分数的第一，第二，第三……个渐近分数。

例 
$$\frac{37}{11} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}} = [3,2,1,2,1]$$

其渐近分数为

$$3, \quad 3\frac{1}{2}, \quad 3\frac{1}{3}, \quad 3\frac{3}{8}, \quad 3\frac{4}{11}$$



# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

从天文学知道，一年有365.24220...个所谓的“平均日”，而不是365个平均日。

如果地球绕太阳一周是365天整，那么我们就不需要分平年与闰年。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

如果地球绕太阳一周恰好是365.25 天，那么我们每四年加一天的算法就可以非常精确。

如果地球绕太阳一周恰好是365.24 天，那么一百年就有24 个闰年。即四年一闰而百年少一闰就是我们用的历法的来源。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

由  $\frac{1}{4}$  可知，每四年加一天，由  $\frac{24}{100}$  知，每百年加24天，但是事情并不是那样的简单。

地球绕太阳一周的时间是365.2422……个所谓的“平均日”

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

若用天文年则为365.2422。这一小误差逐渐引起了季节和日历关系之间的难以预料的大变动。

例如16世纪，春分是3月11日，而不是原来的3月21日。

中国历史上曾经有过多次重大的历法改革等，其根本原因就在于此。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

用更简单的数来代替“平均日”。即便是准确度差一点也行，分解 $365.2422\dots$ 成连分数。我们得到

$$365.24220\dots = 365 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \dots}}}}$$

这里前几个渐近分数是：

$$365; \quad 365\frac{1}{4}; \quad 365\frac{7}{29}; \quad 365\frac{8}{33}; \quad 365\frac{41}{128}; \quad 365\frac{163}{673}; \quad 365\frac{10463}{43200}; \dots$$

说明四年加一天是初步的最好的近似值。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

$$365; \quad 365\frac{1}{4}; \quad 365\frac{7}{29}; \quad 365\frac{8}{33}; \quad 365\frac{41}{128}; \quad 365\frac{163}{673}; \quad 365\frac{10463}{43200}; \dots$$

但 29 年加 7 天更精确些。33 年加 8 天又更精确些。而 99 年加 24 天正是我们的百年少一闰的由来。

128 年加 41 天更精密。积少成多，如果过了 43200 年，照百年 24 闰的算法，一共加了  $432 \times 24 = 10368$  天，应该是 10463 天。这样一来，少加了 95 天。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

按照百年24 润的算法，过43200 年后，人们将提前95 天过年，也就是秋初就要过年了。

所以历法又规定每400 年加一闰。这样做闰年又多了。

# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

进一步规定，世纪数不能被4 整除的世纪年。

如 1700年，1800年，1900年，2100年等不是闰年，  
而其余的世纪年如1600年，2000年，2400年等是闰年。



# 为什么四年一闰，而百年又少一闰

中国农历有大月小月，闰年闰月。

**思考题：为什么农历大月30天，而小月29天？**

由连分数的渐近分数也可以分析

你试试看。